Introducción

En esta unidad aplicarás las propiedades de los números y de las operaciones para construir e interpretar expresiones aritméticas y algebraicas que te permitirán resolver algunas situaciones o problemas que se presentan en la vida cotidiana y escolar.

Para alcanzar este aprendizaje y dominar los conceptos tratados en esta unidad, es importante analizar detenidamente los contenidos, seguir con atención los ejemplos y ejercitar tus habilidades mediante la resolución de ejercicios y problemas.

1. Lenguaje algebraico

En la primera unidad conociste las propiedades de los números reales y sus operaciones básicas.

Sabes que al sumar dos números no importa el orden en que los escribas, obtendrás el mismo resultado, esta es una propiedad importante de la suma con dos números reales y se cumplirá siempre sin importar de qué números se trate.

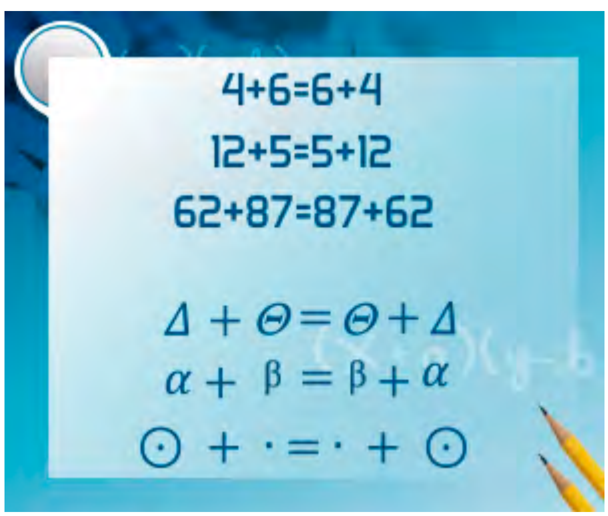
$$3+4=7$$

$$4+3=7$$

$$128+325=453$$

$$325+128=453$$

Como puedes ver, en esta fórmula se utilizan las letras a y b para representar a dos números cualesquiera y describir la propiedad mencionada. Para escribir la propiedad también se pueden utilizar otro tipo de símbolos, de tal modo que la igualdad siempre se cumple, tal como lo podemos ver en los ejemplos:



En álgebra se usan ***letras o literales*** para representar números, esto permite no sólo escribir de manera general las propiedades de los números reales, tal como se pudo observar en la fórmula de la propiedad conmutativa, sino también describir patrones, fórmulas y que extrapoles lo aprendido a nuevas situaciones que no conoces, pero que podrás deducir, así como comparar, predecir y sacar conclusiones.

Al descubrir cómo resolver un problema y querer explicar a otras personas el procedimiento realizado para su solución, el uso de expresiones algebraicas facilitan el trabajo y permiten identificar un patrón en la solución, con lo cual se crea una regla general para la resolución de problemas similares.

Este es el objetivo de las matemáticas: entender y resolver problemas. Las expresiones que contienen letras y signos de operación reciben el nombre de **expresiones algebraicas.**

Para que puedas entender con mayor claridad el uso de expresiones algebraicas y su importancia, para representar cualquier situación, su generalización para hacer comparaciones y su utilización para predecir un resultado, se te presentan dos ejemplos. Descarga el siguiente documento denominado *Ejemplos de expresiones algebraicas*, donde podrás analizar y poner en práctica lo que has visto en este tema.

Expresiones algebraicas.pdf

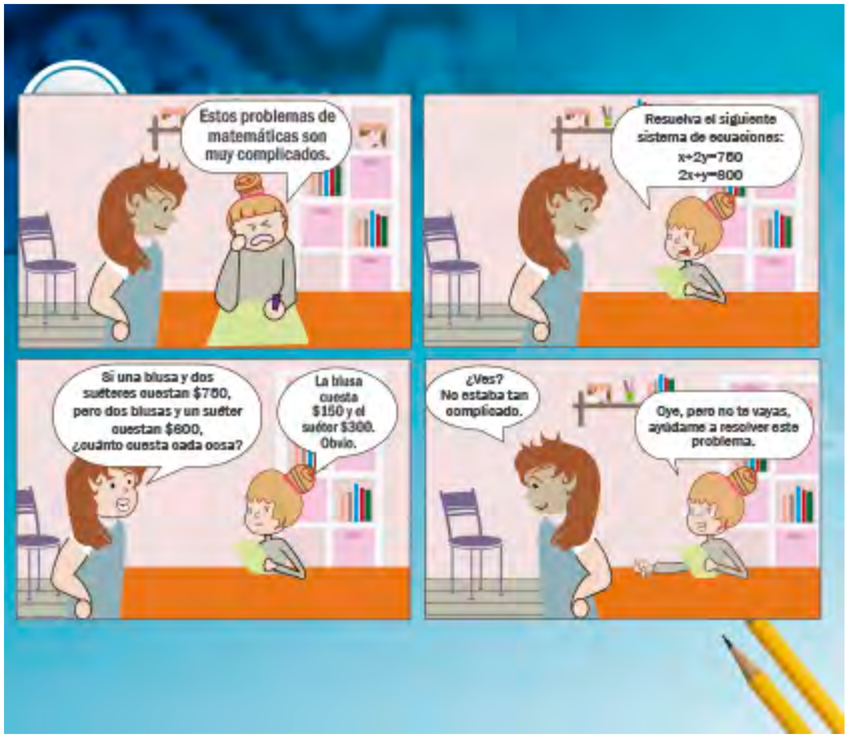
Como en álgebra se utilizan letras para representar números, es importante la forma en que se escriben los **símbolos de las operaciones fundamentales.**

Por convención, ya no se utilizará el símbolo $\times$ para la multiplicación, dado que se puede confundir con la letra x. En el lenguaje cotidiano a veces se utilizan expresiones como "tres veces cinco" para indicar la suma $5+5+5$ o el equivalente de 3×5, así que podemos escribir "3 veces a" o $3\times a$ simplemente como $3a$; cuando aparezcan juntos un número y una letra, o dos letras, entendemos que se están multiplicando, pero esta regla no aplica para dos números juntos, pues nuestro sistema de numeración es posicional y dos números juntos forman otro número; en este caso se utilizará el símbolo $\cdot$ o haremos uso de los paréntesis, y se escribirá $3\cdot 5$ o $3(5)$ para evitar confundir con el número 35.

A excepción de esta notación para la multiplicación, las otras operaciones se escribirán como hasta ahora.

1.1 Traducción de expresiones algebraicas

Como te habrás dado cuenta, para resolver un problema, es importante saber **traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico.**



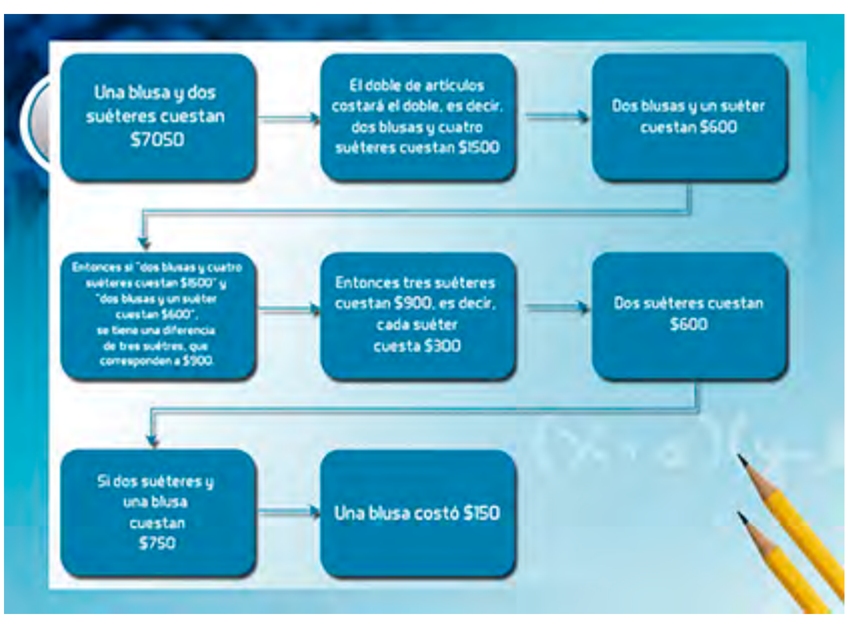
Para que puedas aprender a traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico se creó el siguiente contenido, que combina la explicación del tema con la aplicación directa de este conocimiento, presta atención en el caso y los problemas que se derivan.

En una tienda de ropa para damas es día de ofertas, todas las blusas están al mismo precio, y lo mismo ocurre con los suéteres. Tus mejores amigas Irma y Lucy van de compras.

Lucy compró dos blusas y un suéter y pagó $\$600$.
Irma compró una blusa y dos suéteres y pagó $\$750$.

La pregunta es: ¿con estos datos es posible averiguar el precio de cada artículo?

Por supuesto, hay diversas formas de resolver este ejercicio, se te presenta un razonamiento que te permitirá averiguar dicha información:



Hay elementos implícitos que se dan por conocidos. Por ejemplo, si una blusa cuesta $\$150$, entonces dos blusas cuestan $\$300$, tres blusas cuestan $\$450$, y así sucesivamente; resuelve la siguiente pregunta:

¿Cuánto cuestan 7 blusas?

Para obtener el precio de varios artículos iguales, se multiplica el precio individual del artículo por el número de artículos que se compran. Si por el contrario, se sabe que 3 suéteres cuestan $\$900$, el precio de cada suéter se obtiene dividiendo $\$900$ en tres partes iguales, es decir, dividiendo $900 \div 3$. Observa el uso de las operaciones, cada operación tiene un significado y su interpretación en el razonamiento.

Este razonamiento se puede describir de manera abreviada:

1) 1 blusa $+2$ suéteres $= 750$
2) El doble de artículos cuesta el doble.
   2 blusas $+4$ suéteres $= 1500$
3) 2 blusas $+1$ suéter $= 600$
4) Restando.
   3 suéteres $= 900$
5) Dividiendo entre 3
   1 suéter $= 300$

Expresemos ahora el enunciado en lenguaje algebraico para encontrar la solución.

- Si b es el precio de una blusa y s el precio de un suéter, entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2b + s = 600 ...(1)$$

$$b + 2s = 750 ...(2)$$

- Multiplicando la segunda ecuación por 2 obtenemos:

$$2b + 4s = 1500$$

- Restando a esta ecuación la primera del sistema obtenemos:

$$(2b + 4s) - (2b + s) = 1500 - 600$$

$$3s = 900$$

- Dividiendo entre 3 :

$$s = 300$$

- Para encontrar el precio de la blusa se sustituye el valor de b en cualquiera de las ecuaciones (1) o (2). Eligiendo la segunda **ecuación**:

$$b + 2(300) = 750$$

- Despejando b:

$$b = 750 - 600$$
$$b = 150$$

En álgebra es común utilizar las letras x y y, esto es una especie de "estándar algebraico", pero tú eres libre de usar las letras o símbolos que te parezcan más cómodos dentro del contexto del problema; lo que sí es importante es indicar lo que representa cada letra de manera muy específica, como en el ejemplo anterior donde b es el precio de una blusa y s el precio del suéter.

Adquirir el hábito de representar mediante expresiones algebraicas situaciones concretas que se presentan en nuestro lenguaje cotidiano te ayudará a identificar las letras clave para su traducción.

Ejemplos:

La suma de dos números: $a + b$
La multiplicación de dos números: $ab = a \cdot b$

La división, razón o cociente de dos números: $\frac{a}{b} = a/b = a \div b$
El cuadrado de un número: a^2
Un número elevado a la quinta potencia: a^5

Y a partir de ellas, expresiones más elaboradas.

La suma de los cuadrados de dos números: $a^2 + b^2$
El cuadrado de la suma de dos números: $(a + b)^2$
La diferencia de las raíces cúbicas de dos números: $\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}$
El triple de un número: $3n = 3(n) = 3 \cdot n$

El doble de la suma de dos números: $2(a + b) = 2 \cdot (a + b)$
El consecutivo de un número: $n + 1$
El producto de tres números consecutivos: $n(n + 1)(n + 2)$

Observa que "la suma de los cuadrados" y "el cuadrado de la suma" son expresiones totalmente diferentes, aunque suenen similares. Hay tener cuidado con el orden de las palabras.

Para que puedas aplicar lo visto anteriormente, se te presenta el siguiente ejercicio: encontrarás tres enunciados con dos opciones de expresiones algebraicas que las traducen, elige la que creas que representa a la oración.

a) La raíz cuadrada de la suma de dos números:

○ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ○ $\sqrt{a+b}$

b) Un número disminuido en 7:

○ $a-7$ ○ $\frac{a}{7}$

c) El doble de un número entre la mitad de otro:

○ $2a \div b$ ○ $2a \div \frac{b}{2}$

También debes aprender a expresar cantidades mediante expresiones, tal como los siguientes ejemplos:

Enunciados	Expresiones
La suma de las edades de Angélica y Lizbeth.	$a + l$
La edad de Lizbeth dentro de 10 años.	$l + 10$
La edad de Lizbeth hace 5 años.	$l - 5$
El precio de 7 suéteres.	$7s$
El precio de 6 suéteres y 2 dos blusas.	$6s + 2b$
El precio de un suéter que tiene 50% de descuento.	$(50\%) \cdot s = (0.50) \cdot s = \frac{s}{2}$
El precio de un suéter que tiene 30% de descuento.	$(70\%) \cdot s = (0.70) \cdot s = \frac{7}{10} s$

Las expresiones algebraicas también pueden escribirse empleando el lenguaje común.

Saber interpretar el lenguaje algebraico te permitirá relacionar los números y las variables para darles un sentido.

Descarga el archivo Lenguaje algebraico para que revises algunos ejemplos.

[Lenguaje algebraico.pdf]

Selecciona cuál enunciado es la traducción al lenguaje común de las siguientes expresiones algebraicas; encontrarás tres expresiones con dos opciones, elige la que creas correcta.

$3n^2$

- ◯ El triple del cuadrado de un número.
- ◯ El cuadrado de un número aumentado en tres.

$A = \pi r^2$

- ◯ Fórmula que expresa el perímetro de un círculo.
- ◯ Fórmula que expresa el área de un círculo.

$a^3 - b^3$

- ◯ La diferencia del cubo de dos números.
- ◯ La diferencia de dos números elevada al cubo.

1.2 Conceptos básicos y terminología

Una **expresión algebraica** es el resultado que se obtiene al realizar operaciones como la suma, resta, multiplicación, división raíces o potencias.

$$3y - x^2yz + \frac{x^3y}{2} + 5x^9$$

La anterior es una expresión algebraica porque involucra una serie de operaciones a realizar con los números 3, $-1, \frac{1}{2}$ y 5, llamados **coeficientes**, y de las **literales**, x, y y z, quienes vienen acompañadas de sus respectivos **exponentes**. Al ser sustituidas estas últimas se obtiene un número real llamado **valor numérico** de la expresión.

Por ejemplo:

Si $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$, el valor de la expresión $3y - x^2yz + \dfrac{x^3y}{2} + 5x^9$ es:

$3(2) - (1)^2(2)(3) + \dfrac{(1)^3(2)}{2} + 5(1)^9$

$= 6 - 6 + 1 + 5 = 6$

$3y$, x^2yz, $\dfrac{x^3y}{2}$ y $5x^9$ se llaman términos algebraicos.

Si los términos algebraicos tienen las mismas letras con los mismos exponentes o, dicho en palabras más simples. Aquellos términos sólo se diferencian en el coeficiente, reciben el nombre de **términos semejantes.**

Ejemplos:

$2a^2b$, $\dfrac{2}{3}a^2b$ y $\sqrt{7}a^2b$ son términos semejantes.

$2m^7n^3$ y $2m^3n^7$ no son términos semejantes.

Polinomios

Un caso especial son aquellas expresiones algebraicas en las cuales todos los exponentes de las literales son enteros positivos. Aquella expresion que consta de un solo término recibe el nombre de **monomio** y si tiene dos o más términos es **polinomio**. En particular, si el polinomio tiene dos términos se llama **binomio** y si tiene 3, **trinomio.**

Ejemplos:

m^2n^6 es un monomio.

$ab^4 + 2abc$ es un polinomio y además un binomio.

$5x^2y - 4xy^4 + 7$ es un polinomio, en particular un trinomio.

El **grado de un término** es la suma de los exponentes de las literales y el **grado del polinomio** es el grado del término de mayor grado.

> Si todos los términos de un polinomio son del mismo grado se dice que es homogéneo.

Ejemplo:

$$3y - x^2yz + \frac{x^3y}{2} + 5x^9$$

Éste es un polinomio cuyos elementos son:

- **Literales o letras:** x,y,z
- **Términos algebraicos:** $3y$, $-x^2yz$, $\frac{x^3y}{2}$, $5x^9$
- **Coeficiente de cada término:** el coeficiente de y es 3, el de x^2yz es -1, el de x^3y es $\frac{1}{2}$ y el coeficiente de x^9 es 5.
- **Grado del término:** del primer término es 1, del segundo es 4, del tercero es 4 y del cuarto es 9.
- **Grado del polinomio**: 9.

Descarga el siguiente documento denominado *Polinomio*, revisa el polinomio que ahí encontrarás, reconócelo e identifícalo y con la información obtenida llena la tabla que ahí se encuentra, una vez realizado el ejercicio, compara los resultados con las respuestas que se encuentran abajo, recuerda que estos ejercicios te permiten darte cuenta de lo que has aprendido.

Polinomio.doc

1.3 Operaciones con polinomios

Las expresiones algebraicas son números y, como tales, tienen las mismas propiedades de los números reales y pueden operarse de la misma manera, pero también tienen las siguientes diferencias :

- Cuando uno trabaja con polinomios, los trabaja sin saber qué número representan.
- Cuando nos encontramos con una expresión como $x + y$ podemos interpretar que se trata de dos números que se están sumando, pero sin saber de qué números se trata es imposible determinar el número que corresponde al valor de la suma, así que tendremos que trabajar esta expresión tal como está, hasta que podamos averiguar de qué números se trata.

¿Recuerdas cuál es la propiedad que relaciona la suma y la multiplicación?

Para que apliques la propiedad distributiva, revisa el siguiente ejemplo:

Si tres muchachos comen dos manzanas cada uno, y dos muchachas comen también dos manzanas cada una, entonces los muchachos comieron $3 \times 2 = 6$ manzanas y las muchachas comieron $2 \times 2 = 4$ manzanas, entre todos habrán comido $6 + 4 = 10$ manzanas.

$$3 \times 2 + 2 \times 2 = 6 + 4 = 10$$

Esto se puede calcular también de la siguiente manera; son 5 personas en total (tres muchachos y dos muchachas) y cada uno come dos manzanas, así que entre todos comen $5 \times 2 = 10$ manzanas.

$$3 \times 2 + 2 \times 2 = (3 + 2) \times 2 = 5 \times 2 = 10$$

Esta es la llamada propiedad distributiva, su regla general la escribimos de la siguiente manera:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

o respecto a la suma, se puede escribir:

$$a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$$

Esta propiedad se puede utilizar de diversas formas, pero las dos principales son las siguientes:

Por un lado dice que en el producto de un número por la suma de otros dos, el producto se distribuye, es decir, el número de afuera multiplica a los dos que están dentro del paréntesis y después se suman los resultados. Esta regla genera otras reglas similares:

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

$$a(b + c - d) = ab + ac - ad$$

$$a(a + b) = a \cdot a + a \cdot b = a^2 + ab$$

Cuando se trabaja con números, se resuelven primero las operaciones que se encuentran dentro de los paréntesis y después se sigue la jerarquía de las operaciones.

$$5 + 3(2 - 4) + 2(1 + 6)$$

$$5 + 3(-2) + 2(7)$$

$$5 + (-6) + 14$$

$$5 - 6 + 14$$

Pero esto no es posible hacerlo cuando trabajamos con letras pues en álgebra, aunque las letras se usan para representar números, es necesario saber de qué números se trata para realizar las operaciones; por ello, nos centramos en trabajar las propiedades de las operaciones y gracias a ellas podemos manipular nuestras expresiones algebraicas.

Por otro lado, esta propiedad dice que si estamos contando cosas similares, como la cantidad de manzanas del ejemplo, podemos agruparlas y sumarlas.

$$3 \text{ naranjas} + 5 \text{ naranjas} = (3+5) \text{ naranjas} = 8 \text{ naranjas}$$
$$10 \text{ canicas} + 15 \text{ canicas} = 25 \text{ canicas}$$

En álgebra aprovechamos esta propiedad para **sumar y restar** términos semejantes:

$$3x + 2x = 5x$$

$$2y^2 + 7y^2 = 9y^2$$

$$8a^2b - 5a^2b = 3a^2b$$

La propiedad distributiva permite sumar únicamente términos semejantes. Observa los siguientes ejemplos.

$$3x^2 + 2x + 5 + 2x^2 - x + 6$$

$$= (3+2)x^2 + (2-1)x + (5+6)$$

$$= 5x^2 + x + 11$$

$$8x^2 + 7xy + 8y^2 - 4xy + 2x^2 - 6y^2$$

$$= (8+2)x^2 + (7-4)xy + (8-6)y^2$$

$$= 10x^2 + 3xy + 2y^2$$

> Cuando sumamos dos polinomios, podemos sumar únicamente los términos semejantes.

Realiza en tu cuaderno los siguientes ejercicios.

Ejercicio

$(x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3) - (x^3 - 4x^2y - 2xy^2 - y^3) =$

Problema

La ganancia diaria de una microempresa se determina restando los gastos de las ventas. Los gastos se representan mediante la expresión algebraica $6xy + y$ y los ingresos de las ventas con la expresión $1000 + xy - x$. Determina el polinomio que representa la ganancia diaria de la microempresa. R.

La propiedad distributiva nos permitirá remover los paréntesis en las expresiones algebraicas, especialmente cuando tengamos que **multiplicar** polinomios.

Por ejemplo, si tenemos el producto de los siguientes binomios:

$$(a + b)(x + y)$$

La propiedad distributiva se aplica sobre el producto de la siguiente manera:

$$(a + b)(x + y) = a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y)$$

y volviendo a aplicar la propiedad distributiva, tenemos:

$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$$

$$b \cdot (x + y) = b \cdot x + b \cdot y$$

Por lo tanto:

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$$

De la misma manera podemos obtener reglas más generales:

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

$$(a + b + c)(x + y) = ax + ay + bx + by + cx + cy$$

$$(a + b - c)(x - y + z) = ax - ay + az + bx - by + bz - cx + cy - cz$$

La *regla general* es muy simple: *para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término del primero por cada término del segundo, después se suman todos los productos obtenidos, aplicando correctamente la ley de los exponentes y de los signos.*

En caso de resultar términos semejantes, se debe realizar la suma o resta de los coeficientes, según sea el caso. Esta simplificación se conoce como ***reducción de términos semejantes***

Ejemplos:

$$(3x^2+2xy+5)(2x+6)=(3x^2+2xy+5)(2x)+(3x^2+2xy+5)(6)$$

$$=6x^3+4x^2y+10x+18x^2+12xy+30$$

$$(a^3+3a-2)(2a^2-4a+3)$$

$$=(a^3+3a-2)(2a^2)+(a^3+3a-2)(-4a)+(a^3+3a-2)(3)$$

$$=2a^5+6a^3-4a^2-4a^4-12a^2+8a+3a^3+9a-6$$

$$=2a^5-4a^4+9a^3-16a^2+17a-6$$

Practica lo aprendido.

Realiza en tu cuaderno los siguientes ejercicios.

Ejercicios

1. $(n^2+mn+m^2)(n-m)=$
2. $(a^3+2a^2-a)(a^2-2a+5)=$
3. $[(x+y)(x+y)-3(x-y)(x-y)][(x+y)(x-y)+x(y-x)]=$

Problema

En una fábrica se quieren construir cajas abiertas de $(2x+1)$ de largo, de $(y+3)$ de ancho y de z de altura. Encuentra el polinomio que denota el volumen de la caja. R.

Ahora estudiemos la siguiente operación, que es la división. En los enteros, dividir invierte el proceso de multiplicación; es decir, busca uno de los factores si se conoce el otro.

Por ejemplo, al dividir 35 entre 7, lo que se busca es un número que multiplicado por 7 dé como resultado el 35.

$$35\div 7=5 \text{ porque } 7\times 5=35$$

De la misma manera podemos responder la pregunta ¿por cuánto debemos multiplicar $2x^2$ para obtener $8x^3$? Si has comprendido el proceso de multiplicación es fácil notar que el término que se busca contiene los factores que hacen falta, el coeficiente (4) y una literal (x).

$$8x^3 \div 2x^2 = 4x \text{ porque } 2x^2 \cdot 4x = 8x^3$$

Esto se puede realizar también de la siguiente manera:

$$\frac{8x^3}{2x^2} = 4x$$

Dicho en palabras, se divide el 8 entre 2 y x^3 entre x^2; es decir, se dividen los coeficientes y para las literales, se aplican las reglas de exponentes y leyes de los signos.

Veamos otro ejemplo:

$$\frac{3a^5b^3c^2}{5a^2b^3c} = \frac{3a^{5-2}b^{3-3}c^{2-1}}{5} = \frac{3a^3c}{5}$$

En general, se puede dividir un polinomio entre un monomio de la misma manera, pues podemos separar términos, así que cada término se divide entre el monomio.

$$(32x^4 - 8x^3 + 4x^2) \div (2x^2)$$

$$= \frac{32x^4 - 8x^3 + 4x^2}{2x^2}$$

$$= \frac{32x^4}{2x^2} - \frac{8x^3}{2x^2} + \frac{4x^2}{2x^2} = 16x^2 - 4x + 2$$

Ejercicios:

Realiza en tu cuaderno las siguientes operaciones y elige el resultado al que llegaste.

1. $16a^4b^3c^2 \div (-8a^2b^2c) =$

$2a^2b^2c$ $-2a^2bc$

2. $\dfrac{8m^4 + 27n^4 - 30m^2n^2}{2m^2 - 3n^2} =$

$4m^2 - 9n^2$ $9m^2 - 4n^2$

3. $\dfrac{x^3 - y^3}{x - y} =$

$x^2 - xy + y^2$ $x^2 + xy + y^2$

4. La posición de un objeto en movimiento se representa mediante la expresión $t^2 + t - 6$ y su velocidad mediante $t + 3$. Encuentra el polinomio que representa el tiempo.

◉ $t-2$ ○ t^2+2t-2

En aquellos casos en que los exponentes de las literales sean números fraccionarios o negativos, las operaciones se efectúan de la misma forma.

Ejemplo:

$$\frac{\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{9}}c^{\frac{1}{6}}\right)^9}{\left(a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{2}{3}}\right)^6}=\frac{b^6c^{\frac{3}{2}}}{a^4}$$

Las expresiones algebraicas como sumas o diferencias de potencias de dos o más términos, entre otras, tienen una representación especial que puede remplazarse con productos de expresiones más sencillas. Esos productos de uso frecuente reciben el nombre de productos notables y el procedimiento para lograrlos se conoce como factorización, el cual veremos con mayor detalle en el siguiente tema.